Varianta 075

SUBIECTUL I

a) $\left|\sqrt{2}+i\sqrt{3}\right|=\sqrt{5}$. b) $a=2$. c) $\sin\frac{\pi}{6}\cdot\cos\frac{\pi}{6}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{4}$.

d) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-3 \end{cases}$. e) $(x-1)^2+(y-1)^2=4$. f) Dreapta $2x-3y+1=0$ este paralelă cu dreapta dată $2x-3y+5=0$.

SUBIECTUL II

1.

a) $x=\hat{3}\cdot\hat{7}=\hat{5}$.

b) $E=24-6=18$.

c) $1+2+\ldots+2^9=\frac{2^{10}-1}{2-1}=2^{10}-1$.

d) Ecuația se rescrie sub forma echivalentă $(x-1)(x^2+1)=0$. Se obține soluția reală $x=1$.

e) $\frac{4}{5}$.

2.

a) $f'(x)=3x^2+\cos x+1$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{7}{4}-\cos 1$.

c) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)=2$.

d) Cum $\cos x\in[-1,1]$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, rezultă că $\cos x+1\geq 0$ oricare ar fi $x\in\mathbf{R}$. Atunci $f'(x)=3x^2+\cos x+1>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, deci funcția f este crescătoare pe **R**.

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}=0$.

SUBIECTUL III

a) Pentru $a=c=1\in(0,\infty)$ și $b=0\in\mathbf{R}$, rezultă $I_2\in G$.

b) $\det(M)=ac$.

c) Fie $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\in G$ şi $B=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\in G$. Atunci $A\cdot B=\begin{pmatrix} ax & 0 \\ bx+cy & cz \end{pmatrix}\in G$,

deoarece $ax, cz\in(0,\infty)$ şi $bx+cy\in\mathbf{R}$.

d) Verifcare prin calcul direct.

e) Fie $U=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\in G$ şi $V=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\in G$. Pentru ca $U\cdot V\neq V\cdot U$ este necesar ca

$bx+cy\neq ay+bz$. Se pot alege matricele $U=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ şi $V=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, pentru care

$U\cdot V=\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 8 & 1 \end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}=V\cdot U$.

f) Pentru $n=2$, egalitatea $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ b(a+c) & c^2 \end{pmatrix}$ este adevărată. Presupunem că

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^k=\begin{pmatrix} a^k & 0 \\ b\left(a^{k-1}+a^{k-2}c+\ldots+ac^{k-2}+c^{k-1}\right) & c^k \end{pmatrix}$ şi demonstrăm că

$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ b\left(a^k+a^{k-1}c+\ldots+ac^{k-1}+c^k\right) & c^{k+1} \end{pmatrix}$.

Avem

$$\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^{k+1}=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^k\cdot\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ ab\left(a^{k-1}+a^{k-2}c+\ldots+ac^{k-2}+c^{k-1}\right)+bc^k & c^{k+1} \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a^{k+1} & 0 \\ b\left(a^k+a^{k-1}c+\ldots+ac^{k-1}+c^k\right) & c^{k+1} \end{pmatrix}$$

Deci $\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ b\left(a^{n-1}+a^{n-2}c+\ldots+ac^{n-2}+c^{n-1}\right) & c^n \end{pmatrix}$, $n\geq 2$.

g) Fie $A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix}\in G$. Căutăm o matrice $X=\begin{pmatrix} x & 0 \\ y & z \end{pmatrix}\in G$ astfel încât $X^n=A$.

Folosind f), rezultă $x^n=a$, $z^n=c$ şi $y\left(x^{n-1}+x^{n-2}z+\ldots+yz^{n-2}+x^{n-1}\right)=b$. Atunci,

pentru orice $n\in\mathbf{N}^*$, avem $x=\sqrt[n]{a}$, $y=\dfrac{b}{\sqrt[n]{a^{n-1}}+\sqrt[n]{a^{n-2}c}+\ldots+\sqrt[n]{ac^{n-2}}+\sqrt[n]{c^{n-1}}}$ şi

$z=\sqrt[n]{c}$.

SUBIECTUL IV

a) $f'(x)=3^x\ln 3+2^x\ln 2$, $x\in\mathbf{R}$.

b) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=0$.

c) Cum $f'(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, rezultă că funcția f este crescătoare pe **R**.

d) Avem $f''(x)=3^x(\ln 3)^3+2^x(\ln 2)^2>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, rezultă că funcția f este convexă pe **R**.

e) Fie $F:\mathbf{R}\to\mathbf{R}$ o primitivă a funcției f. Atunci $F'(x)=f(x)>0$ pentru orice $x\in\mathbf{R}$, rezultă că funcția F este crescătoare pe **R**.

f) $\int_0^1 |f(x)|dx=\int_0^1 (2^x+3^x)dx=\frac{1}{\ln 2}+\frac{2}{\ln 3}$.

g) Deoarece funcția f este strict crescătoare pe **R**, ecuația $f(x)+f(2x)+f(3x)=6$ admite soluție unică. Avem ecuația $3^x+2^x+3^{2x}+2^{2x}+3^{3x}+2^{3x}=6$ care admite unica soluție $x=0$.